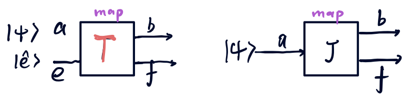
Kraus Operators

H_e 中 $|\hat{e}\rangle$.固定的初态 $|\hat{e}\rangle$



time development $\xrightarrow{t_0\to t_1}$ T

$J|\psi\rangle = T(|\psi\rangle\otimes|\hat{e}\rangle)$

$J: H_a \longrightarrow H_b\otimes H_f$ 有 $\forall\ |\Phi\rangle = J|\phi\rangle$ $|\Psi\rangle = J|\psi\rangle$ $\Rightarrow$ $\langle\Phi|\Psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$

i.e. 保持内积 $\longrightarrow$ $\begin{cases} \text{范数不变} & \|\cdot\|: X\to \mathbb{R} \\ \Rightarrow \text{对向量空间由范数导出的}\underline{\text{度量不变}} & d: X\times X\to\mathbb{R} \quad (d(x,y) = \|x-y\|) \end{cases}$

J , Isometry 等距同构

$\dim(H_a) = d_a$ $\dim H_b = d_b$ $\dim H_f = d_f$

J 把 H_a 映射到 $H_b\otimes H_f$ 的一个 d_a 的子空间

即必须有 $d_a \leqslant d_b d_f$

选 H_f 中正交归一基 $\{|f^k\rangle\}$ 总可以写成.

$|\Psi\rangle = J|\psi\rangle = T(|\psi\rangle\otimes|\hat{e}\rangle) = \sum_k |\beta^k\rangle\otimes|f^k\rangle$

任意的

考虑 用 $\{|f^k\rangle\}$ 基 测量.

测量之后 结果为 k 的概率, 由 J 性质 $\langle\beta^k|\beta^k\rangle = \|\beta^k\|^2 = P_k$

则 重新归一化 $|\hat{\beta}^k\rangle = |\beta^k\rangle/\|\beta^k\|$

J , $|\hat{e}\rangle$, $\{|f^k\rangle\}$ 均固定 $(|\beta^k\rangle = K_k|\psi\rangle)$ $|\beta^k\rangle = K_k(|\psi\rangle)$

K_k : Kraus Operator $H_a\to H_b$ 的线性映射

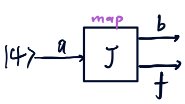
于是 $J|\psi\rangle = T(|\psi\rangle\otimes|\hat{e}\rangle) = \sum_k (K_k(|\psi\rangle))\otimes|f^k\rangle$

QCQI 中更多关注 $H_b = H_a$ 的情况, 但 考虑 $d_a \neq d_b$ 的情况是有意义的

$|\beta^k\rangle = K_k|\psi\rangle$, K_k 存在性 不明显

验证 (i) $c|\psi\rangle$ (ii) $|\psi\rangle \to |x\rangle+|w\rangle$ (补充证明)

$c|\beta^k\rangle\otimes|f^k\rangle$ $(|\beta_1^k\rangle + |\beta_2^k\rangle)\otimes|f^k\rangle$



$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\Psi|\Psi\rangle = \|\sum_k(K_k|\psi\rangle)\otimes|f^k\rangle\|^2 = \sum_k\langle\beta^k|\beta^k\rangle = \sum_k\langle\psi|K_k^\dagger K_k|\psi\rangle = \langle\psi|(\sum_k K_k^\dagger K_k)|\psi\rangle$

$\Rightarrow$ $\sum_k K_k^\dagger K_k = I_a$

$K_k: H_a\to H_b$ $K_k^\dagger: H_b\to H_a$ $\Rightarrow$ $K_k^\dagger K_k: H_a\to H_a$ $\xrightarrow[\text{reason}]{\text{任意 } |\psi\rangle}$ $\sum_k K_k^\dagger K_k = I_a$

显然 K_k 与选取的 $\{|f^k\rangle\}$ 有关 只是反映不同的组合 ($|f^k\rangle$ 对应 b 中的态 $|\beta^k\rangle$)
但 如何选择测量的基是 没有物理意义的. 不会产生实际的影响