狭义相对论的张量分析

> 参考书目：A First Course in General Relativity (Bernard Schutz)

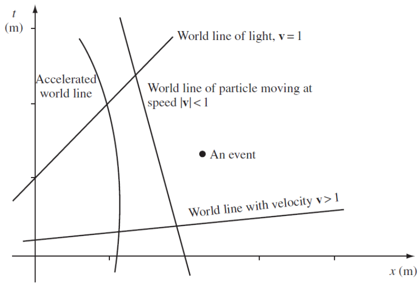
狭义相对论基础

Special relativity (SR) 的几何观点：(t, x, y, z)是**时空(spacetime)四维流形**的四个坐标。

两个基础假设：Galileo的**相对性原理**，Einstein的**光速不变原理**。

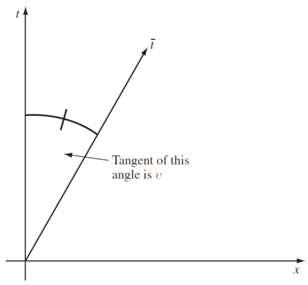
单位：$c = 1$，$1\ \mathrm{s} = 3 \times 10^8\ \mathrm{m}$

时空图(Spacetime diagrams)

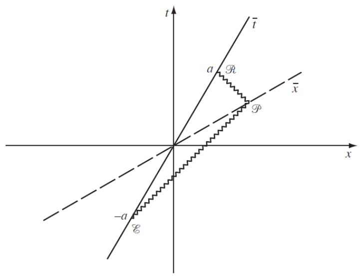


A spacetime diagram in natural units.

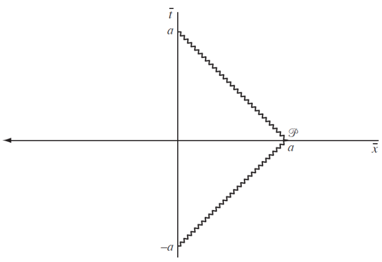
坐标(t, x, y, z)也可以写作(x^0, x^1, x^2, x^3)



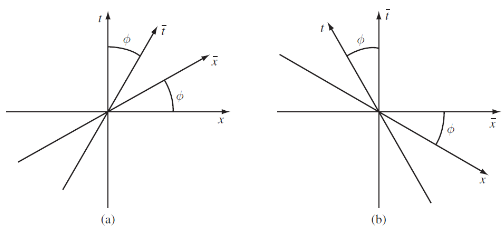
The time-axis of a frame whose velocity is v.



The reflection in Fig. 1.3, as measured $\mathcal{O}$.



Light reflected at a, as measured by $\bar{\mathcal{O}}$.



Spacetime diagrams of $\mathcal{O}$ (left) and $\bar{\mathcal{O}}$ (right).

真欧氏空间的不同参考系间正交变换遵循矢量点积公式不变。

SR遵循：**间隔不变性** $\rightarrow$ 仿射空间（不存在矢量点积，**无度量**的线性空间）

$$\begin{gathered}\Delta s^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ \Delta \bar{s}^2 = \Delta s^2\end{gathered} \tag{1}$$

洛伦兹变换

由时空图中的几何关系可得：

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \alpha(t - vx),\\ \bar{x} &= \alpha(x - vt).\end{aligned} \tag{2}$$

由间隔不变性得到：$\alpha = \pm 1/\sqrt{1-v^2}$.

$$\begin{cases}\bar{t} = \dfrac{t}{\sqrt{1-v^2}} - \dfrac{vx}{\sqrt{1-v^2}},\\ \bar{x} = \dfrac{x}{\sqrt{1-v^2}} - \dfrac{vt}{\sqrt{1-v^2}},\\ \bar{y} = y,\\ \bar{z} = z.\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{t}\\ \bar{x}\\ \bar{y}\\ \bar{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma & -v\gamma & & \\ -v\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t\\ x\\ y\\ z\end{bmatrix}. \tag{4}$$

狭义相对论的向量分析

通过一个典型的表示时空间隔的向量引入，记为：

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) \tag{5}$$

说明：向量 $\Delta\vec{x}$ 是不依赖于分量的，使用记号 $\underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow}$ 来强调后面的一组量是它在参考系$\mathcal{O}$下的分量。可以进一步简记：

$$\Delta\vec{x} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} \{\Delta x^\alpha\} \tag{6}$$

其中上标α表示了0-3所有四个分量$\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$。它在另一个参考系$\bar{\mathcal{O}}$的分量则可以记作：

$$\Delta\vec{x} \underset{\bar{\mathcal{O}}}{\longrightarrow} \{\Delta x^{\bar{\alpha}}\} \tag{7}$$

张量：与坐标系选择无关的客观物理量。
三维欧氏空间n阶张量的完整定义包括在一个坐标系中给出3^n个数，以及规定这些数在坐标变换时的变换规律两部分。

向量分量的参考系变换

爱因斯坦求和约定:

$$A_\alpha B^\alpha = \sum_{\alpha=0}^{3} A_\alpha B^\alpha, \quad T^\gamma E_{\gamma\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{3} T^\gamma E_{\gamma\alpha}. \tag{8}$$

需要强调缩并规则和很多线性代数记法的约定不同的一点，要强调上标和下标，缩并只能发生在相同字母的上标和下标之间，而同侧例如$A_\beta A_\beta$是不能够缩并的。此外，在本书记号体系里，对4指标使用Greek，而对类空分量1-3使用Latin。例如，也可以这样来记上面的变换:

$$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\Delta x^\beta = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{0}\Delta x^0 + \Lambda^{\bar{\alpha}}_{i}\Delta x^i \tag{9}$$

所有被求和的指标称作**哑指标(dummy index)**，没有求和的称为**自由指标(free index)**。一个等式两侧的哑指标可以是不同或相同，根据方便灵活选取。但是自由指标必须是一样的。

考虑两个参考系之间变换的数学表达。若洛伦兹变换矩阵元是$\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}$，采用爱因斯坦求和记号，可以把同一向量在两个参考系之间的变换写为：

$$\Delta x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}\Delta x^\beta \tag{10}$$

接下来，我们对一个4-向量和它在 $\mathcal{O}$ 的坐标分量记作：

$$\vec{A} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (A^0, A^1, A^2, A^3) = \{A^\alpha\} \tag{11}$$

同时，用黑体**A**来指代一个3-向量或者4-向量的空间部分。

基向量

在参考系$\mathcal{O}$中可以定义一组基向量（必须强调它是对于参考系而言的，相同的数学表示在$\bar{\mathcal{O}}$下并不是同样的向量）：

$$\begin{cases} \vec{e}_0 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,0,0,0), \\ \vec{e}_1 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,1,0,0), \\ \vec{e}_2 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,1,0), \\ \vec{e}_3 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,0,1). \end{cases} \tag{12}$$

或者简洁地使用Kronecker符号记作：

$$(\vec{e}_\alpha)^\beta = \delta^\beta_\alpha \tag{13}$$

因此也可以用基矢量来表示某个向量：

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha \tag{14}$$

基变换

一个向量用不同的基表示都是一样的，因此

$$\vec{A} = A^\alpha \vec{e}_\alpha = A^{\bar{\alpha}} \vec{e}_{\bar{\alpha}} \tag{15}$$

联系之前的分量变换（$A^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha A^\alpha$），得到：

$$A^\alpha \vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha A^\alpha \vec{e}_{\bar{\alpha}} \tag{16}$$

矩阵元为标量，求和顺序可交换。因此

$$A^\alpha (\Lambda^{\bar{\alpha}}_\alpha \vec{e}_{\bar{\alpha}} - \vec{e}_\alpha) = 0 \tag{17}$$

将哑指标换成$\bar{\beta}$并注意到对任意$\vec{A}$成立，则对每一个A^α成立

$$\Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \vec{e}_{\bar{\beta}} - \vec{e}_\alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{e}_\alpha = \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \vec{e}_{\bar{\beta}} \tag{18}$$

可以发现，参考系变换时，向量分量和基的变换是不同的，它们的下标上标相反，意义也不一样。对比：（此处为逆变分量？）

$$\begin{aligned} \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha \vec{e}_{\bar{\beta}} &= \vec{e}_\alpha \\ A^{\bar{\beta}} &= \Lambda^{\bar{\beta}}_\alpha A^\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

尽管不是非常规范，可以采用矩阵的方式帮助记忆：

$$\begin{bmatrix} A^{\bar{0}} \\ A^{\bar{1}} \\ A^{\bar{2}} \\ A^{\bar{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda^{\bar{0}}_0 & \Lambda^{\bar{0}}_1 & \Lambda^{\bar{0}}_2 & \Lambda^{\bar{0}}_3 \\ \Lambda^{\bar{1}}_0 & \Lambda^{\bar{1}}_1 & \Lambda^{\bar{1}}_2 & \Lambda^{\bar{1}}_3 \\ \Lambda^{\bar{2}}_0 & \Lambda^{\bar{2}}_1 & \Lambda^{\bar{2}}_2 & \Lambda^{\bar{2}}_3 \\ \Lambda^{\bar{3}}_0 & \Lambda^{\bar{3}}_1 & \Lambda^{\bar{3}}_2 & \Lambda^{\bar{3}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{\bar{0}} & \vec{e}_{\bar{1}} & \vec{e}_{\bar{2}} & \vec{e}_{\bar{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^{\bar{0}}_0 & \Lambda^{\bar{0}}_1 & \Lambda^{\bar{0}}_2 & \Lambda^{\bar{0}}_3 \\ \Lambda^{\bar{1}}_0 & \Lambda^{\bar{1}}_1 & \Lambda^{\bar{1}}_2 & \Lambda^{\bar{1}}_3 \\ \Lambda^{\bar{2}}_0 & \Lambda^{\bar{2}}_1 & \Lambda^{\bar{2}}_2 & \Lambda^{\bar{2}}_3 \\ \Lambda^{\bar{3}}_0 & \Lambda^{\bar{3}}_1 & \Lambda^{\bar{3}}_2 & \Lambda^{\bar{3}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{e}_0 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

例：对于洛伦兹变换矩阵$\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}$（式4），若$\vec{A}\xrightarrow[\mathcal{O}]{}(5,0,0,2)$，得到

$$\begin{gathered}A^{\bar{0}}=5\gamma,\ A^{\bar{1}}=-5v\gamma,\ A^{\bar{2}}=0,\ A^{\bar{3}}=2.\\ \vec{e}_0=\gamma\vec{e}_{\bar{0}}-v\gamma\vec{e}_{\bar{1}},\ \vec{e}_1=-v\gamma\vec{e}_{\bar{0}}+\gamma\vec{e}_{\bar{1}},\ \vec{e}_2=\vec{e}_{\bar{2}},\ \vec{e}_3=\vec{e}_{\bar{3}}.\end{gathered}\tag{22}$$

逆变换

洛伦兹变换仅与相对速度有关，若$\bar{\mathcal{O}}$相对于$\mathcal{O}$以速度$\boldsymbol{v}$运动，则

$$\vec{e}_{\alpha}=\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\bar{\beta}}.\tag{23}$$

相反地，也可以认为$\mathcal{O}$相对于$\bar{\mathcal{O}}$以速度$-\boldsymbol{v}$运动，得到

$$\vec{e}_{\bar{\mu}}=\Lambda^{\nu}_{\bar{\mu}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}.\tag{24}$$

反带回式23，并改变哑标，得到：

$$\vec{e}_{\alpha}=\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\vec{e}_{\bar{\beta}}=\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\boldsymbol{v})\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}(-\boldsymbol{v})\vec{e}_{\nu}\tag{25}$$

进而推出：$\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\boldsymbol{v})$是$\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}(-\boldsymbol{v})$的逆矩阵

$$\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}(-\boldsymbol{v})\Lambda^{\bar{\beta}}_{\alpha}(\boldsymbol{v})=\delta^{\nu}_{\alpha}=\mathbb{I}\tag{26}$$

四速度和四动量（没太懂，再看看）

标积

无度量的仿射空间，依赖**度规张量**的定义，变为伪欧氏空间。

对于spacetime四维空间，由于间隔不变性，定义向量$\vec{A}$的大小为：

$$\vec{A}^2=-(A^0)^2+(A^1)^2+(A^2)^2+(A^3)^2\tag{27}$$

值得注意的两点：①向量的大小可正（类空）可负（类时）可零（类光）②$\vec{A}^2=0$不代表它是零向量，因为其分量不一定全为0。

在任何参考系下，都有：（但必须是同一参考系）

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=-A^0B^0+A^1B^1+A^2B^2+A^3B^3\tag{28}$$

自洽性验证：

$$\begin{aligned}(\vec{A}+\vec{B})^2&=(A^0+B^0,A^1+B^1,A^2+B^2,A^3+B^3)^2\\&=-(A^0+B^0)^2+(A^1+B^1)^2+(A^2+B^2)^2+(A^3+B^3)^2\\&=-(A^0)^2+(A^1)^2+(A^2)^2+(A^3)^2-(B^0)^2+(B^1)^2+(B^2)^2+(B^3)^2+2(-A^0B^0+A^1B^1+A^2B^2+A^3B^3)\\&=\vec{A}^2+\vec{B}^2+2\vec{A}\cdot\vec{B}\end{aligned}\tag{29}$$

另外定义正交性：$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$，但注意两者正交不一定是成$\pi/2$角，比如类光间隔与任何向量正交，以及巧妙的正负分布。

例：四正交基

$$\begin{gathered}\vec{e}_{\alpha}\cdot\vec{e}_{\beta}=\eta_{\alpha\beta},\quad\text{where}\\ \eta_{\alpha\beta}=\begin{cases}0,&(\alpha\neq\beta)\\-1,&(\alpha=\beta=0)\\+1,&(\alpha=\beta=1,2,3)\end{cases}\end{gathered}\tag{30}$$

对于式28，可以写为度规张量的表达形式：（平坦的闵可夫斯基空间）

$$\begin{gathered}\vec{A}\cdot\vec{B}=g_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta},\quad\text{where}\\ \begin{cases}0,&(\alpha\neq\beta)\end{cases}\end{gathered}\tag{31}$$

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1, & (\alpha = \beta = 0) \\ +1, & (\alpha = \beta = 1, 2, 3) \end{cases}$$