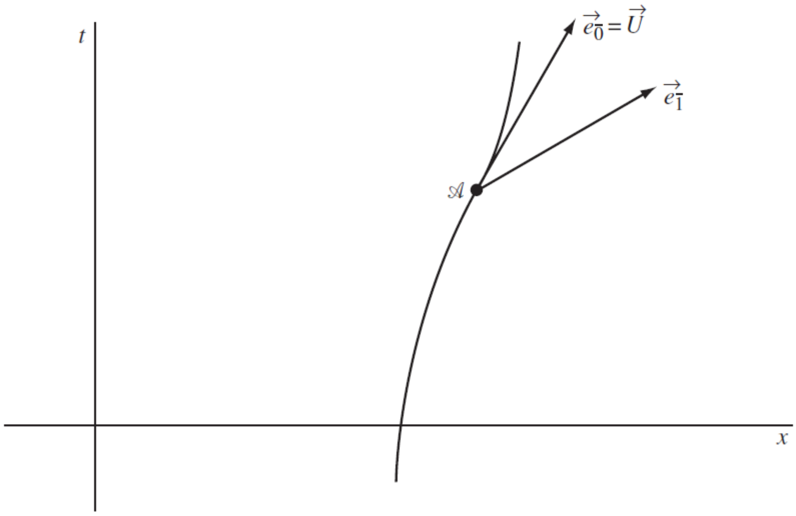
四速度和四动量

定义四维向量$\vec{U}$为一条世界线的**四速度**，其方向与该世界线相切，在时间轴上的投影为单位值。如果考虑该粒子的momentarily comoving reference frame (MCRF)为$\bar{\mathcal{O}}$，则时间的单位基向量$\vec{e}_0 = \vec{U}$，并相应得到空间的三个基向量$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$（可旋转）。



The four-velocity and MCRF basis vectors of the world line at $\mathcal{A}$

若粒子的静质量为m，**四动量**被定义为：

$$\vec{p} = m\vec{U} \tag{1}$$

则在参考系$\mathcal{O}$下，四动量的分量为：

$$\vec{p} \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (E, p^1, p^2, p^3) \tag{2}$$

其中$E := p^0$为粒子在参考系$\mathcal{O}$下的能量。但四速度和四动量则与参考系无关。

四动量守恒：在相互作用前后，$\vec{p}$保持不变

$$\vec{p} := \sum_{\text{all particles } (i)} \vec{p}_{(i)} \tag{3}$$

应用

若一个粒子有无限小位移$\mathrm{d}\vec{x}$，则得到间隔$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$，并定义**固有时间**(proper time)：

$$(\mathrm{d}\tau)^2 = -\mathrm{d}\vec{x} \cdot \mathrm{d}\vec{x} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = -1, \quad \mathrm{d}\vec{x} \underset{\text{MCRF}}{\longrightarrow} (\mathrm{d}\tau, 0, 0, 0) \tag{5}$$

于是得到四速度的微分表达式：

$$\vec{U} = (\vec{e}_0)_{\text{MCRF}} = \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{} \tag{6}$$

相似地，可以定义四维向量“加速度”的微分表达式：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{U}}{\mathrm{d}\tau},\quad \vec{U}\cdot\vec{a}=0 \tag{7}$$

由式(36)可知$\vec{U}\cdot\vec{U}=-1$，则获得与粒子总能量相似的表达式：

$$\begin{gathered}\vec{p}\cdot\vec{p}=m^2\vec{U}\cdot\vec{U}=-m^2=-E^2+(p^1)^2+(p^2)^2+(p^3)^2\\ E^2=m^2+\sum_{i=1}^{3}(p^i)^2\end{gathered} \tag{8}$$

设有任一参考系$\bar{O}$以四速度$\vec{U}_{\text{obs}}$运动，而某粒子以四动量$\vec{p}$运动，有

$$\vec{p}\cdot\vec{U}_{\text{obs}}=\vec{p}\cdot\vec{e}_{\bar{0}} \tag{9}$$

而$\vec{p}\underset{\bar{O}}{\longrightarrow}(\bar{E},p^{\bar{1}},p^{\bar{2}},p^{\bar{3}})$，故以四动量$\vec{p}$运动的粒子在任意参考系$\bar{O}$下的能量表达式为：

$$-\vec{p}\cdot\vec{U}_{\text{obs}}=\bar{E} \tag{10}$$

光子

光子在类光间隔的世界线上运动，故$\mathrm{d}\tau=0$，则无法定义其四速度，也就没有MCRF。但光子的四动量依然存在，且为了保证其与世界线平行，必须有

$$\vec{p}\cdot\vec{p}=-E^2+\sum_{i=1}^{3}(p^i)^2=0 \tag{11}$$

所以可以得出结论：光子的空间动量与能量相等。

又由于量子力学中光子能量$E=h\nu$，故可推得多普勒效应

$$\frac{\bar{\nu}}{\nu}=\frac{1-v}{\sqrt{1-v^2}}=\sqrt{\frac{1-v}{1+v}} \tag{12}$$

狭义相对论的张量分析

张量定义

定义$\binom{0}{N}$张量为将N个 **向量** 通过 **线性变换** 得到 **实数** 的函数。

为了理解该定义，以一个$\binom{0}{2}$张量为例。令$\mathbf{g}$为度规张量，并规定

$$\mathbf{g}(\vec{A},\vec{B}):=\vec{A}\cdot\vec{B} \tag{13}$$

则$\mathbf{g}(\ ,\ )$是两个变量的函数，且遵从线性关系：

$$\mathbf{g}(\alpha\vec{A}+\beta\vec{B},\vec{C})=\alpha\,\mathbf{g}(\vec{A},\vec{C})+\beta\,\mathbf{g}(\vec{B},\vec{C}) \tag{14}$$

值得注意的是，**张量是向量的函数，而与向量在某参考系下的分量无关**。而对于普通实值函数$f(t,x,y,z)$，则可认为是$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$张量。

在参考系$\mathcal{O}$下，$\begin{pmatrix}0\\N\end{pmatrix}$张量的分量为以基矢$\{\vec{e}_\alpha\}$为变量的函数值。以度规张量为例，其在$\mathcal{O}$下的分量为:

$$\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=\vec{e}_\alpha\cdot\vec{e}_\beta=\eta_{\alpha\beta} \tag{15}$$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$张量：one-forms

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$张量被称作 a covector, a covariant vector, or a one-form. 应存在于对偶向量空间(dual vector space)中。

任取一个1-形式为$\tilde{p}$，其分量为p_α：

$$p_\alpha=\tilde{p}(\vec{e}_\alpha) \tag{16}$$

使用下标表示张量的分量，上标表示向量的分量，故有

$$\tilde{p}(\vec{A})=\tilde{p}(A^\alpha\vec{e}_\alpha)=A^\alpha\tilde{p}(\vec{e}_\alpha)=A^\alpha p_\alpha \tag{17}$$

这叫作$\vec{A}$和$\tilde{p}$的**缩并**，在任意向量和one-form间即可进行，无需借助其他张量（如标积需要度规张量），故而是更基本的缩并。

在进行参考系变换时:

$$\begin{aligned}p_{\bar{\beta}}:=\tilde{p}(\vec{e}_{\bar{\beta}})=\tilde{p}(\Lambda^\alpha_{\bar{\beta}}\vec{e}_\alpha)=\Lambda^\alpha_{\bar{\beta}}p_\alpha\\ \vec{e}_{\bar{\beta}}=\Lambda^\alpha_{\bar{\beta}}\vec{e}_\alpha\end{aligned} \tag{18}$$

也就是说，$\tilde{p}$的分量变换与基向量一致，而与向量分量相反（逆变换）。这保证了缩并$A^\alpha p_\alpha$与参考系无关，即张量作用的不变性。

由于$\tilde{p}$的分量变换与基向量一致，故称为“covariant vector”，而普通向量$\vec{A}$的分量变换与基向量相反，故称为“contravariant vector”，但这些命名比较过时了。现在一般分别称为“dual vector / one-form”和“vector”。

由于one-forms的集合构成了一个对偶向量空间，故可以选取四个线性无关的one-forms构成该空间的基底$\{\tilde{\omega}^\alpha\}$，我们称它与向量空间的基底$\{\vec{e}_\alpha\}$**对偶**(dual)。

$$\tilde{p}(\vec{A})=p_\alpha\tilde{\omega}^\alpha(A^\beta\vec{e}_\beta)=p_\alpha A^\beta\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)=p_\alpha A^\alpha \tag{19}$$

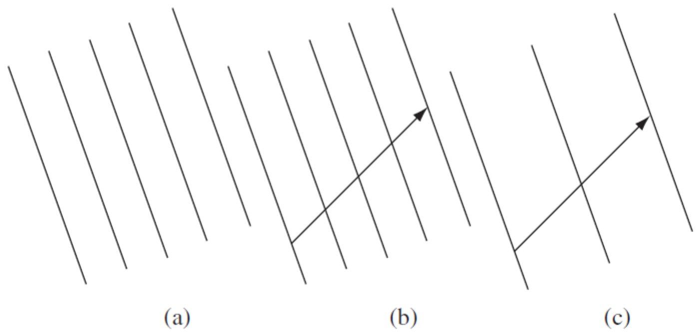
故必须有

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta)=\delta^\alpha_\beta \tag{20}$$

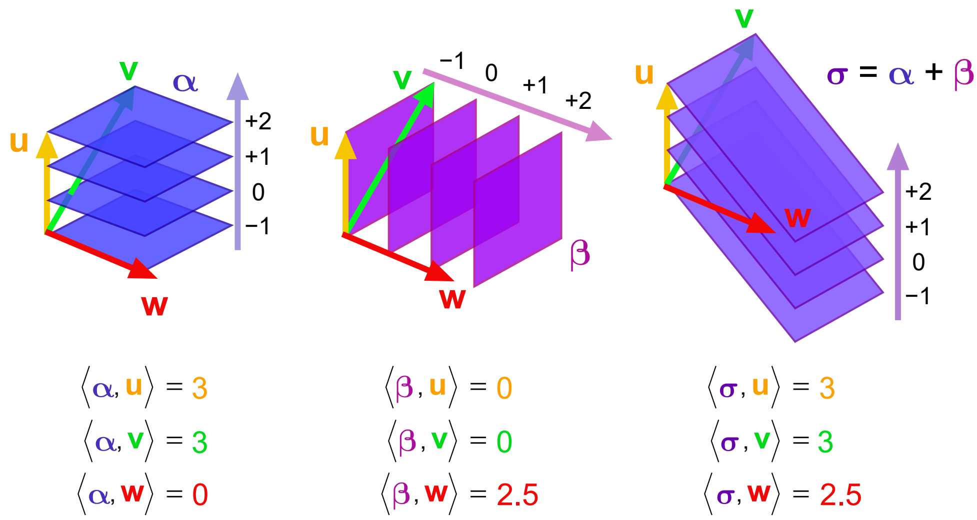
$$\begin{cases} \tilde{\omega}^0 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (1,0,0,0), \\ \tilde{\omega}^1 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,1,0,0), \\ \tilde{\omega}^2 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,1,0), \\ \tilde{\omega}^3 \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} (0,0,0,1). \end{cases} \tag{21}$$

$$\tilde{\omega}^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} \tilde{\omega}^{\beta} \tag{22}$$

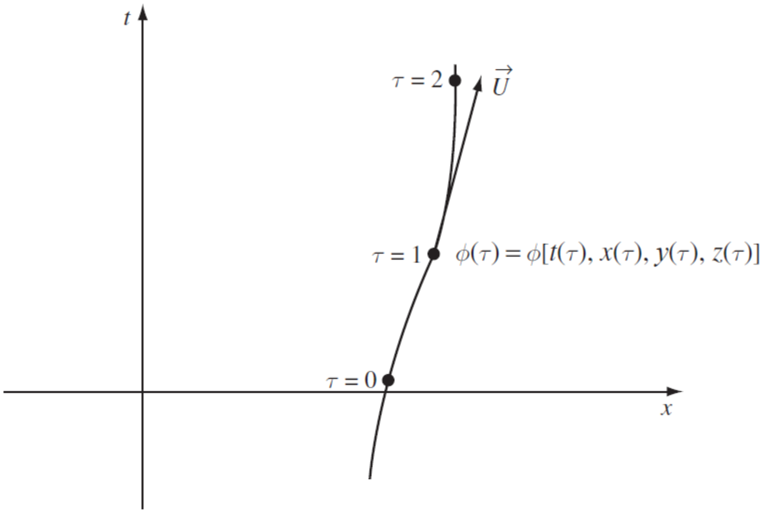
类似于使用箭头来表示向量，我们可以想象一系列曲面来表示one-form（以三维欧式空间为例）。向量穿透这些面的数量就是缩并的结果，而one-form本身的大小由曲面间距给出，间距越小，其“值”越大。



(a) The picture of one-form complementary to that of a vector as an arrow. (b) The value of a one-form on a given vector is the number of surfaces the arrow pierces. (c) The value of a smaller one-form on the same vector is a smaller number of surfaces. The larger the one-form, the more ‘intense’ the slicing of space in its picture.



在四维时空图中，它应该使用三维曲面表示，但重要的是理解one-form代表了一种切割空间的方式，接下来通过讨论梯度来证明其合理性。



A world line parametrized by proper time τ, and the values $\phi(\tau)$ of the scalar field $\phi(t, x, y, z)$ along it.

考虑时空图中存在一个标量场$\phi(\vec{x})$，若将自变量由事件$\vec{x}$变为沿世界线的固有时间τ，则有：

$$
\begin{aligned}
\phi(\tau) &= \phi[t(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau)] \\
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\partial\phi}{\partial t}U^t + \frac{\partial\phi}{\partial x}U^x + \frac{\partial\phi}{\partial y}U^y + \frac{\partial\phi}{\partial z}U^z \\
&= \tilde{\mathrm{d}}\phi(\vec{U})
\end{aligned}
\tag{23}
$$

即我们可以定义一个one-form为$\tilde{\mathrm{d}}\phi$，通过对向量$\vec{U}$的线性变换得到实数$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\tau$。这就是标量场$\phi$的**梯度**：

$$
\tilde{\mathrm{d}}\phi \underset{\mathcal{O}}{\longrightarrow} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{24}
$$

在三维欧氏空间中，梯度是向量，意为一个具有单位长度且能穿过最多等高面的向量。但在四维时空图中，需要借助度规张量才能具有“长度”的概念，而在上述推导中并不涉及其他张量，故此处梯度是一个one-form而非向量。

另外，考虑one-form的分量变换：

$$
(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\beta}_{\bar{\alpha}}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\beta} = \Lambda^{\beta}_{\bar{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\beta}} = \Lambda^{\beta}_{\bar{\alpha}}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}}\frac{\partial x^{\bar{\alpha}}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \tag{25}
$$

故梯度分量的变换与向量分量的变换相逆。

$$
\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\bar{\alpha}}} = \Lambda^{\beta}_{\bar{\alpha}} \tag{26}
$$

微分算符的标记为：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}} &:= \phi_{,\alpha} \\
x^{\alpha}_{,\beta} &\equiv \delta^{\alpha}_{\beta}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

相应地，还需要考虑“normal one-forms”。向量空间中规定法向量与任何与曲面相切的向量正交，但在对偶向量空间中，不使用度规张量则无法通过标积为0来判断正交。于是定义normal one-form为与任何与曲面相切的向量的缩并值为0。

$\binom{0}{2}$张量

我们已经知道度规张量是一种$\binom{0}{2}$张量，但最简单的应该是两个one-form的外积$\tilde{p}\otimes\tilde{q}$，而运算规则$(\tilde{p}\otimes\tilde{q})(\vec{A},\vec{B})=\tilde{p}(\vec{A})\tilde{q}(\vec{B})$。

通常的$\binom{0}{2}$张量并不能写成外积形式，但是可以将其表示为外积形式的张量的和。我们考虑张量$\mathbf{f}$的某一个分量：

$$f_{\alpha\beta}\coloneqq\mathbf{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta) \tag{28}$$

而相应的，它对某两个向量的作用，通过分量来计算，即：

$$\mathbf{f}(\vec{A},\vec{B})=\mathbf{f}(A^\alpha\vec{e}_\alpha,B^\beta\vec{e}_\beta)=A^\alpha B^\beta\mathbf{f}(\vec{e}_\alpha,\vec{e}_\beta)=A^\alpha B^\beta f_{\alpha\beta} \tag{29}$$

我们也可以将它按照对偶向量空间中的一组基底写出来：

$$\mathbf{f}=f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta} \tag{30}$$

则相应要满足：

$$f_{\mu\nu}=\mathbf{f}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)=f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu) \tag{31}$$

则替换哑标得到：

$$\tilde{\omega}^{\alpha\beta}(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)=\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu \tag{32}$$

由式(52)，对于one-form我们已经有：

$$\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\mu)=\delta^\alpha_\mu \tag{33}$$

因此，每个基底 $\tilde{\omega}^{\alpha\beta}=\tilde{\omega}^\alpha\otimes\tilde{\omega}^\beta$. 张量$\mathbf{f}$整体就写成对简单外积的求和形式了：

$$\mathbf{f}=f_{\alpha\beta}\tilde{\omega}^\alpha\otimes\tilde{\omega}^\beta \tag{34}$$

对称性

$\binom{0}{2}$张量$\mathbf{f}$是对称的，如果

$$\mathbf{f}(\vec{A},\vec{B})=\mathbf{f}(\vec{B},\vec{A}),\quad\forall\vec{A},\vec{B} \tag{35}$$

那么将作用的对象换为两个基向量，就可以推知$\mathbf{f}$的分量

$$f_{\alpha\beta}=f_{\beta\alpha} \tag{36}$$

而任意的$\binom{0}{2}$张量$\mathbf{h}$也可以定义一个新的对称张量$\mathbf{h}_{(S)}$:

$$\mathbf{h}_{(S)}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A},\vec{B}) + \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B},\vec{A}) \tag{37}$$

使用特殊记号为:

$$h_{(\alpha\beta)} := h_{(S)\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} + h_{\beta\alpha}) \tag{38}$$

相似地，$\binom{0}{2}$张量$\mathbf{f}$是反对称的，如果

$$\begin{gathered} \mathbf{f}(\vec{A},\vec{B}) = -\mathbf{f}(\vec{B},\vec{A}), \quad \forall \vec{A},\vec{B} \\ f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha} \end{gathered} \tag{39}$$

而任意的$\binom{0}{2}$张量$\mathbf{h}$也可以定义一个新的反对称张量$\mathbf{h}_{(A)}$:

$$\mathbf{h}_{(A)}(\vec{A},\vec{B}) = \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{A},\vec{B}) - \frac{1}{2}\mathbf{h}(\vec{B},\vec{A}) \tag{40}$$

使用特殊记号为:

$$h_{[\alpha\beta]} := h_{(A)\alpha\beta} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\beta} - h_{\beta\alpha}) \tag{41}$$

反推得知:

$$h_{\alpha\beta} = h_{(\alpha\beta)} + h_{[\alpha\beta]} \tag{42}$$

故任意的$\binom{0}{2}$张量可以独特地分解为对称和反对称两部分。

特别地，度规张量$\mathbf{g}$是对称的。