1.

a) 已知势能 $V_0=V_0e^{-\mu r^2}$，计算一级玻恩近似下的微分散射截面.

已知

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=|f(\vec{k'},\vec{k})|^2$$

其中,

$$f(\vec{k'},\vec{k})=-\frac{mL^3}{2\pi\hbar^2}<\vec{k'}|V|\Psi^{(+)}>$$

在一级玻恩近似中，$V=T,|\Psi^{(+)}>=|\vec{k}>$，因此，在散射振幅表达式中插入两组完备基，在坐标表象下，散射振幅 $f(\vec{k'},\vec{k})$ 的表达式为

$$f^{(1)}(\vec{k'},\vec{k})=-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int e^{i(\vec{k}-\vec{k'})\cdot\vec{x'}}V(\vec{x'})d^3x'$$

在球对称势下，令 $\vec{q}\equiv\vec{k}-\vec{k'},q=|\vec{k}-\vec{k'}|=2k\sin\frac{\theta}{2}$，先对角度积分后，令 $x'=r$，得到对角度积分后的表达式:

$$f(\vec{k'},\vec{k})=f^{(1)}(\theta)=-\frac{1}{2}\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{iq}\int_0^\infty\frac{r^2}{r}V(r)(e^{iqr}-e^{-iqr})dr$$

$$f^{(1)}(\theta)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{q}\int_0^\infty rV(r)\sin qrdr$$

已知 $V(r)=V_0e^{-\mu r^2}$，所以,

$$f^{(1)}(\theta)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q}\int_0^\infty re^{-\mu r^2}\sin qrdr$$

分部积分，先将指数部分移至后面，可以得到

$$f^{(1)}(\theta)=-\frac{2m}{\hbar^2}\frac{V_0}{q}\frac{q}{2\mu}\int_0^\infty e^{-\mu r^2}\cos qrdr$$

$$=\frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\int_0^\infty e^{-\mu r^2+iqr}+e^{-\mu r^2-iqr}dr$$

其中

$$\int_0^\infty e^{-\mu r^2-iqr}dr=\int_{-\infty}^0 e^{-\mu r^2+iqr}dr$$

因此,

$$f^{(1)}(\theta)=\frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu r^2+iqr}dr$$

（积分公式：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}ax^2+ibx}dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{2a}}$，这里对应 $a = 2\mu$，$b = q$）

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}e^{-\frac{q^2}{4\mu}}$$

b) 求相同近似下的 s 波相移

散射振幅直接解为

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

通常，由于 S 矩阵的幺正性，散射振幅和分波散射振幅 $f_l = \frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}$ 都是复的，而玻恩近似中 T 算符的形式为

$$T = V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V + V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V\frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V + ...$$

而在一级玻恩近似计算中，由于 T 取 V，并且计算散射振幅的积分中全是实数项，所以以及玻恩近似下的散射振幅是实数，这破坏了 S 矩阵的幺正性。因此计算散射相移时，不能直接令

$$f(\theta) = f^{(1)}(\theta)$$

，要对 $f(\theta)$ 进行展开玻恩近似的条件为势能 $V(r)$ 很小可以看作微扰，因此 $V(r)$ 导致的相移 δ_l 也很小，对 $\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik}$ 进行泰勒展开，

$$\frac{e^{2i\delta_l}-1}{2ik} \sim \frac{1+2i\delta_l-1}{2ik} = \frac{\delta_l}{k}$$

因此在相同近似下，

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{\delta_l}{k}P_l$$

此举保证了 S 矩阵的幺正性。所以可以得到下面等式，

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{\delta_l}{k}P_l = f(\theta) = f^{(1)}(\theta) = \frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}e^{-\frac{q^2}{4\mu}}$$

两边同乘 $P_{l'}$ 并对 $\cos\theta$ 积分后可以得到，

$$\frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{q^2}{4\mu}}P_{l'}d\cos\theta=\sum_l\frac{2\delta_l}{k}\delta_{ll'}$$

$l=0$ 时，

$$\frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}\int_{-1}^{1}e^{-\frac{q^2}{4\mu}}d\cos\theta=\frac{2\delta_0}{k}$$

$$\delta_0=\frac{-mV_0}{2\hbar^2\mu}\sqrt{\frac{\pi}{\mu}}(e^{-\frac{k^2}{\mu}}-1)$$