

3.3 前表象与后表象等价

在 IAV 模型中，考虑到

$$a + A \rightarrow b + B^*(= A + x) \rightarrow b + \text{anything} \quad (3.3.1)$$

哈密顿量可以写成

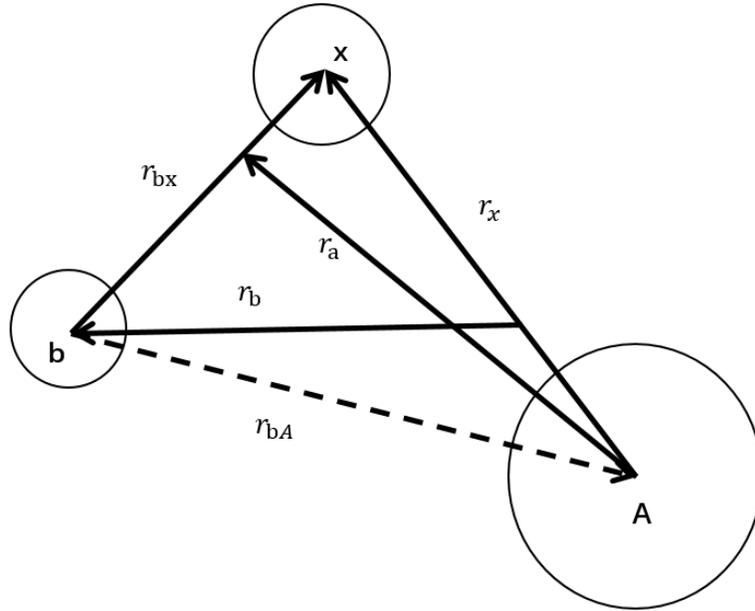
$$H = K + V_{bx} + U_{bA}(\mathbf{r}_{bA}) + H_A(\xi) + V_{xA}(\xi, \mathbf{r}_x) \quad (3.3.2)$$

而在 UT 模型中，考虑到

$$a + A \rightarrow b + x + A \rightarrow b + B^*(= x + A) \quad (3.3.3)$$

这个过程我们称为 breakup-fusion。即弹核先破裂，之后弹核的一部分再与靶核产生反应。

这个两种反应模型在雅各比坐标下均可以表示为



在后表象下 T 矩阵可表示为

$$\mathcal{T}_{\beta\alpha} = \langle \chi_b^{(-)} \Psi_{xA}^c | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 \rangle \quad (3.3.4)$$

则截面可以表示为

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = \frac{2\pi}{\hbar v_a} \rho(E_b) \sum_c \left| \langle \chi_b^{(-)} \Psi_{xA}^c | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 \rangle \right|^2 \delta(E - E_b - E^c) \quad (3.3.5)$$

其中， $\rho(E_b)$ 为态密度， $V_{\text{post}} = V_{bx} + U_{bA} - U_{bB}$ 使用柯西主值定理与克拉莫-克若尼关系 (Kramer-Krong relations)

$$\delta(E - E_b - E^c) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{E^+ - E_b - E^c}. \quad (3.3.6)$$

得到

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Im} \sum_c \left\langle \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 | V_{\text{post}} | \chi_b^{(-)} \Psi_{xA}^c \right\rangle (E^+ - E_b - E^c)^{-1} \quad (3.3.7)$$

$$\times \left\langle \Psi_{xA}^c \chi_b^{(-)} | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 \right\rangle$$

可以写为

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Im} \left\langle \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 | V_{\text{post}} | \chi_b^{(-)} \right\rangle \frac{\sum_c |\Psi_{xA}^c\rangle \langle \Psi_{xA}^c|}{E^+ - E_b - H_{xA}} \left\langle \chi_b^{(-)} | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 \right\rangle \quad (3.3.8)$$

得到

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Im} \left\langle \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 | V_{\text{post}} | \chi_b^{(-)} \right\rangle \frac{1}{E^+ - E_b - H_{xA}} \left\langle \chi_b^{(-)} | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \phi_A^0 \right\rangle \quad (3.3.9)$$

由于 V_{post} 是个标量，且不依赖原子核 A 的内部坐标，所以可以写为

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Im} \left\langle \chi_a^{(+)} \varphi_a | V_{\text{post}} | \chi_b^{(-)} \right\rangle \langle \phi_A^0 | \frac{1}{E^+ - E_b - H_{xA}} | \phi_A^0 \rangle \left\langle \chi_b^{(-)} | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \right\rangle \quad (3.3.10)$$

由于 $H_{xA} = H_A + K_x + V_{xA}$ ，则其中 $\langle \phi_A^0 | \frac{1}{E^+ - E_b - H_{xA}} | \phi_A^0 \rangle$ 可展开为

$$\begin{aligned} \langle \phi_A^0 | \frac{1}{E^+ - E_b - H_{xA}} | \phi_A^0 \rangle &= \langle \phi_A^0 | \frac{1}{E^+ - E_b - (H_A + K_x + V_{xA})} | \phi_A^0 \rangle \\ &= \langle \phi_A^0 | \frac{1}{E^+ - E_b - E_A - K_x - V_{xA}} | \phi_A^0 \rangle \\ &= \langle \phi_A^0 | \frac{1}{E_x^+ - K_x - U_{xA}} | \phi_A^0 \rangle \\ &= \frac{1}{E_x^+ - K_x - U_{xA}} \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

其中 $E_x^+ = E^+ - E_b - E_A$ ，其中 U_{xA} 是粒子 x 的光学势。将式 (3.3.11) 带入到式 (3.3.10) 中，我们可以得到下面的结果

$$\left. \frac{d^2\sigma}{d\Omega_b dE_b} \right|_{\text{post}} = -\frac{2}{\hbar v_a} \rho(E_b) \text{Im} \langle \rho_b(\vec{r}_x) | G_x | \rho_b(\vec{r}_x) \rangle \quad (3.3.12)$$

其中 $\rho_b(\vec{r}_x)$ 称之为有源项。

$$\rho_b(\vec{r}_x) \equiv \left\langle \vec{r}_x \chi_b^{(-)} | V_{\text{post}} | \chi_a^{(+)} \varphi_a \right\rangle \quad (3.3.13)$$

这样我们通过格林函数得到了后表象的截面表达式。下面我们开始讨论前表象的情况。

$$V_{\text{prior}} = V_{aA} - U_{aA} = U_{xA} + U_{bA} - U_{aA} \quad (3.3.14)$$

考虑到后表象下的 V_{post} 可以写为

$$V_{\text{post}} = V_{bx} + U_{bA} - U_{bB}$$

则 V_{post} 与 V_{prior} 的关系可以写成

$$V_{\text{prior}} = H_a + V_{\text{prior}} - E_a = H_b + H_x + V_{\text{post}} - E_a = H_x - E_x + V_{\text{post}} \quad (3.3.15)$$

其中

$$\begin{aligned} H_a &= h_a + K_{aA} + U_{aA}, \\ H_b &= K_{bB} + U_{bB}, \\ H_x &= K_{xA} + U_{xA}, \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

h_a 是弹核 a 的本征哈密顿量。

在 UT 模型中，在第一次破碎后，碎片 b 作为一个旁观者，因此剩下过程本质上可以看作是一种两体相互作用。这包括 x 在 A 上的弹性散射（弹性破裂），以及 x 在 A 上的吸收（破裂融合，breakup-fusion）。

$$\sigma_a^R = -\frac{2}{\hbar v_a} \left\langle \chi_a^{(+)} | W_a | \chi_a^{(+)} \right\rangle \quad (3.3.17)$$

这里 W_a 是光学势的虚部， $\chi_a^{(+)}$ 为入射波的扭曲波。 σ_a^R 其对应的是该过程中吸收截面。而为了计算弹性破裂和破裂融合横截面，UT 首先从方程的第一步也就是 $a + A \rightarrow b + x + A$ ，称为反应道 $d(= b + x + A)$ 中推出 σ_d 和 W_d ，即反应截面和光学势的虚部。

由光学势

$$u_x = \left\langle \phi_A^0 | V_{xA} + V_{xA} Q [E^+ - E_b - H_{QQ}]^{-1} V_{xA} | \phi_A^0 \right\rangle \quad (3.3.18)$$

反应道 d 的光学势的虚部可以由上式直接投影得到，

$$W_d = \text{Im} \left\langle \phi_A^0 | V_{\text{prior}} G_d^{(+)} V_{\text{prior}} | \phi_A^0 \right\rangle \quad (3.3.19)$$

类比式 (3.3.17) 得到其截面

$$\sigma_d = -\frac{2}{\hbar v_a} \left\langle \chi_a^{(+)} | W_d | \chi_a^{(+)} \right\rangle \quad (3.3.20)$$

而光学势格林函数 $G_d^{(+)}$ ，在 UT 模型中，使用 U_{xA} 代替 V_{xA} ，则光学势格林函数 $G_d^{(+)}$ 可以写作，

$$G_d^{(+)} = \frac{1}{E - H_0 - K_{xA} - K_{bB} - U_{xA} - U_{bB} + i\varepsilon} \quad (3.3.21)$$

其中 H_0 为本征哈密顿量，对应的是原子核的内部运动。且格林函数满足这样的条件

$$\begin{aligned} G_x &= G_0(1 + U_x G_x) \\ &= (1 + G_x^\dagger U_x^\dagger) G_0(1 + U_x G_x) - G_x^\dagger U_x^\dagger G_x \\ G_x^\dagger &= (1 + G_x^\dagger U_x^\dagger) G_0^\dagger \\ &= (1 + G_x^\dagger U_x^\dagger) G_0^\dagger (1 + U_x G_x) - G_x^\dagger U_x G_x, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

3.4 $^{119}\text{Sn}(d, pX)$ 反应

为佐证在 3.4 节中通过 $^{62}\text{Ni}(d, pX)$ 得到的结论，我们还计算了其他 (d, pX) 反应的去弹性破裂截面，同样在选取的氘核与靶核光学势数据来自 Yinlu Han 的 YYQ06 模型[33]，函数模型为 Wood-Saxon 型；而核子与原子核之间的相互作用的数据来自 Koning 与 Delaroche 的 KD02 模型；使用 KD02 模型描述在不同的能量 E_p 、 E_n 下，质子-靶核与中子-靶核的相互作用[40]。氘核中质子与中子的相互作用势选取 Gaussian 型，其中 $V_0 = -72.14 \text{ MeV}$ ， $a = 1.484 \text{ fm}$ 。具体参数如下表 3.3 所示，

表 3.3: 氘核与 ^{119}Sn 在 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ 时的光学势与 np 之间的相互作用势参数

相互作用势	V[MeV]	r[fm]	a[fm]	W[MeV]	r_w [fm]	a_w [fm]
d- ^{119}Sn	83.053	1.174	0809	2.092	1.563	0.921
	0	0	0	12.044	1.328	0.686
	3.703	1.234	0.813	-0.206	1.234	0.813
n-p	72.14	0	1.484			

同样，对于靶核 ^{119}Sn ，考虑 0 到 30 分波，计算角度从 0 度到 180 度（间隔为 1 度），能量从 1MeV 到 30MeV（间隔为 1MeV）的双微分截面。最后我们得到的质子的能量微分截面如图 3.8 所示。

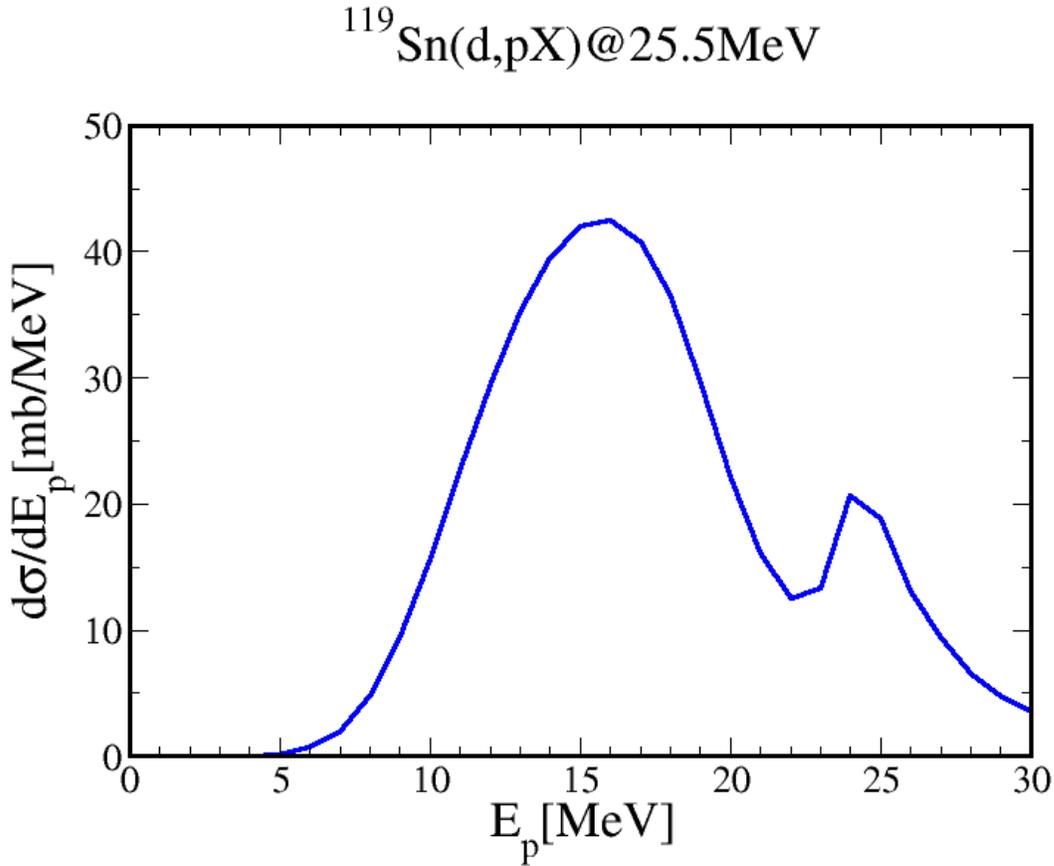


图 3.8: $^{119}\text{Sn}(d,pX)$ 在 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ 能量下，出射质子的能量微分截面去弹性破裂（NEB）贡献部分

与 $^{62}\text{Ni}(d,pX)$ 的能谱相似， $^{119}\text{Sn}(d,pX)$ 的质子能量微分截面也大致上是一个钟形曲线，并在 24MeV 处出现了次强峰。进一步说明了，此现象并不是偶然。但值得注意的是，其峰值位置与 $^{62}\text{Ni}(d,pX)$ 的能谱峰值位置相比变大了一些。关于这一点我们将在下一节中进一步讨论。

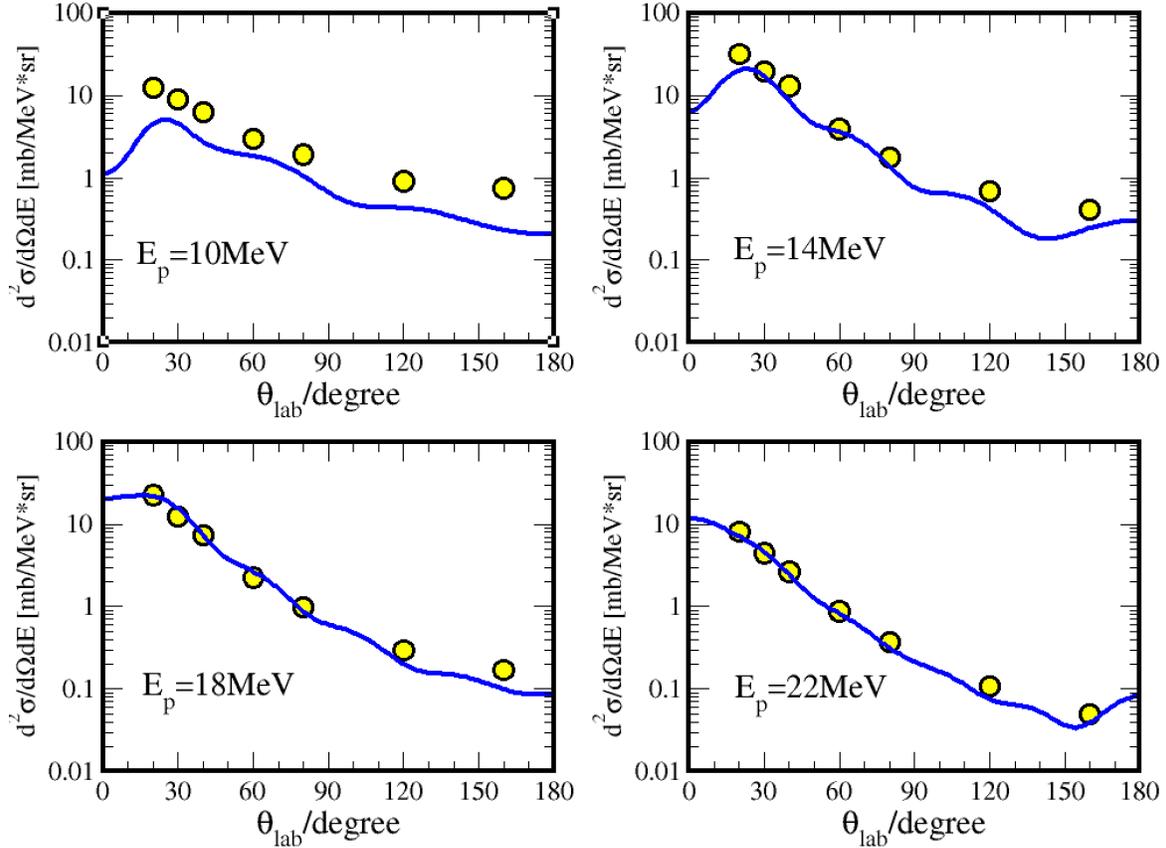


图 3.9: $^{119}\text{Sn}(d, pX)$ 反应的质子出射能量 $E_p=10$ 、14、18 与 22MeV 时的双微分截面随角度变化的图像，其中入射氘核能量 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ ，其中蓝线为去弹性破裂（NEB）的截面，黄点为 Pampus 实验获得的总反应截面[39]。

可以发现在 $^{119}\text{Sn}(d, pX)$ 反应中，计算的去弹性破裂截面都很好的重现了实验得到截面的大小与形状。计算的 $^{119}\text{Sn}(d, pX)$ 去弹性破裂截面印证了，本文在计算 $^{62}\text{Ni}(d, pX)$ 截面时的推论，即在单举破裂反应中，除 0 度附近外，截面主要是由去弹性破裂（NEB）贡献的。

3.5 $^{27}\text{Al}(d, pX)$ ， $^{91}\text{Nb}(d, pX)$ 与 $^{181}\text{Ta}(d, pX)$ 反应

为讨论反应截面能谱峰值位置与靶核质量数 A 的关系，我们计算了 $^{27}\text{Al}(d, pX)$ ， $^{91}\text{Nb}(d, pX)$ 与 $^{181}\text{Ta}(d, pX)$ 在 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ 时截面的能谱。在计算 $^{27}\text{Al}(d, pX)$ ， $^{91}\text{Nb}(d, pX)$ 与 $^{181}\text{Ta}(d, pX)$ 这三个反应时，同样考虑其在 0 到 30 分波，计算角度从 0 度到 180 度（间隔为 1 度），能量从 1MeV 到 30MeV（间隔为 1MeV）的双微分截面。在不同能量下核子与靶核的相互作用势，使用 KD02 模型来描述[40]，使用的光学势的数据同样来自于 YYQ06 模型，具体参数如下表所示，

表 3.4: 氘核与 ^{119}Sn 在 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ 时的光学势与 np 之间的相互作用势参数

相互作用势	V[MeV]	r[fm]	a[fm]	W[MeV]	r_w [fm]	a_w [fm]
d- ^{27}Al	81.149	1.174	0809	0	1.563	0.835
	0	0	0	17.365	1.328	0.600
	3.703	1.234	0.813	-0.206	1.234	0.813
d- ^{93}Nb	83.287	1.174	0809	0.668	1.563	0.904
	0	0	0	13.810	1.328	0.669
	3.703	1.234	0.813	-0.206	1.234	0.813
d- ^{181}Ta	84.762	1.174	0809	3.288	1.563	0.955
	0	0	0	10.561	1.328	0.720
	3.703	1.234	0.813	-0.206	1.234	0.813
n-p	72.14	0	1.484			

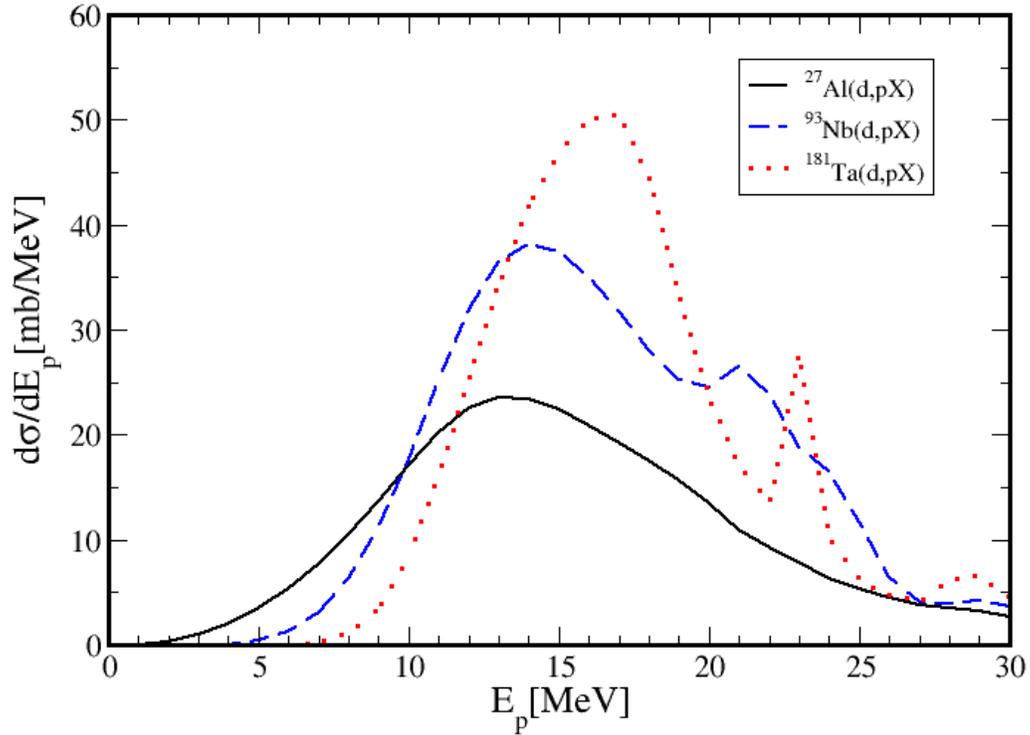


图 3.10 $^{27}\text{Al}(d, pX)$, $^{93}\text{Nb}(d, pX)$ 与 $^{181}\text{Ta}(d, pX)$ 在 $E_{\text{lab}}=25.5\text{MeV}$ 能量下, 出射质子的能量微分截面中去弹性破裂 (NEB) 贡献部分

在图 3.10 上可以印证我们的猜想，反应截面能谱峰值位置随靶核质量数 A 的增大而增大。同时峰值的大小也随着靶核质量数 A 的增大而增大。我们可以从半经典的角度来解释这个现象。考虑到这三个反应氘核有着相同的能量 $E_{lab}=25.5\text{MeV}$ 。但式 (3.1.12) 中指出直接影响反应进行的是质心系下的能量 E_{CM} ，而不是实验参考系下的能量 E_{lab} 。考虑到实验参考系与质心参考系能量有着以下的变换关系，

$$E_{CM} = \frac{m_A}{m_A + m_a} E_{lab} \quad (3.63)$$

其中 m_a 为弹核的质量， m_A 为靶核的质量。显然随着靶核质量的增加， E_{CM} 也逐渐变大，也就是说靶核 A 与弹核 a 的相对运动更加大，穿过位垒、发生反应的概率也就随之变大。这也解释为什么截面质子的截面会随着质量数 A 变大而变大。由于参与反应的能量变大，那么出射的粒子的能量也会随着变大。这种现象在实验中也得到了验证[39]。